MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 9
18.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Zunächst bemerken wir, daß f eine (wohldefinierte) Abbildung ist, denn für $x, y \in \mathbb{Z}$ ist auch $3x - 4y \in \mathbb{Z}$ und $4x - 5y \in \mathbb{Z}$, also $f(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   Wir suchen nun zu beliebig vorgegebenem $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ein Paar $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f(x, y) = (a, b)$, betrachten also die Gleichung

   $$f(x, y) = (a, b)$$

   und suchen deren Lösung(en).

   1. Möglichkeit:
   Sei $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann gilt für $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

   $$\begin{aligned} & f(x, y) = (a, b) \\ \iff\ & (3x - 4y, 4x - 5y) = (a, b) \\ \iff\ & 3x - 4y = a \quad \wedge \quad 4x - 5y = b \\ \iff\ & 12x - 16y = 4a \quad \wedge \quad 12x - 15y = 3b \\ \iff\ & 12x - 16y = 4a \quad \wedge \quad y = 3b - 4a \\ \iff\ & 3x - 4(3b - 4a) = a \quad \wedge \quad y = 3b - 4a \\ \iff\ & 3x - 12b + 16a = a \quad \wedge \quad y = 3b - 4a \\ \iff\ & 3x = 12b - 15a \quad \wedge \quad y = 3b - 4a \\ \iff\ & x = 4b - 5a \quad \wedge \quad y = 3b - 4a \\ \iff\ & (x, y) = (4b - 5a,\ 3b - 4a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

   Also ist $(x, y) = (4b - 5a, 3b - 4a)$ ein solches Paar (das ist die Richtung „$\Longleftarrow$“ in der obigen Rechnung), und zwar das einzig mögliche (das ist die Richtung „ $\Longrightarrow$ “). Ersteres zeigt, daß f surjektiv ist, zweiteres, daß f injektiv ist. Es ist dann also f bijektiv mit

   $$f^{-1} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad f^{-1}(a, b) = (4b - 5a, 3b - 4a).$$

   2. Möglichkeit:
   Statt obige Rechnung mit “$\Longleftrightarrow$“ durchzuziehen, kann man sich auch auf “$\Longrightarrow$“ beschränken, muß anschließend allerdings dann die „Probe“ machen.

Sei $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann gilt für $x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
& f(x,y) = (a,b) \\
\iff\ & (3x-4y, 4x-5y) = (a,b) \\
\iff\ & 3x - 4y = a \quad \wedge \quad 4x - 5y = b \\
\iff\ & \text{(I)} \quad 12x - 16y = 4a \quad \wedge \quad \text{(II)} \quad 12x - 15y = 3b \\
\overset{\text{(II)-(I)}}{\Longrightarrow}\ & y = 3b - 4a \\
\overset{\text{in (I)}}{\Longrightarrow}\ & 12x - 16(3b-4a) = 4a \\
\iff\ & 3x - 4(3b-4a) = a \\
\iff\ & 3x = 12b - 15a \\
\iff\ & x = 4b - 5a.
\end{aligned}$$

Damit hat die Gleichung $f(x,y) = (a,b)$, wenn überhaupt, nur die einzig mögliche Lösung, nämlich $(x,y) = (4b-5a,\ 3b-4a)$; die Abbildung f ist also schon mal injektiv.
Durch Einsetzen zeigt man nun sofort, daß in der Tat

$$f(x,y) = f(4b-5a,\ 3b-4a) = \ \ldots \ = (a,b)$$

gilt. Damit ist f auch surjektiv, also bijektiv, mit

$$f^{-1} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad f^{-1}(a,b) = (4b-5a, 3b-4a).$$

3. Möglichkeit:
Man definiert die Abbildung

$$g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad g(a,b) = (4b-5a, 3b-4a),$$

und rechnet nach, daß für dieses g gilt:

$$(g \circ f)(x,y) = (x,y) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \textbf{und} \quad (f \circ g)(a,b) = (a,b) \text{ für alle } (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

(Die Idee zu g bekommt man durch eine Rechnung wie der 2. Möglichkeit dargestellt.)

Auch dann hätte man gezeigt, daß f bijektiv mit

$$f^{-1} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad f^{-1}(a,b) = (4b-5a, 3b-4a).$$

2. Zunächst sollten wir bemerken, daß f und g tatsächlich (wohldefinierte) Abbildungen sind, also die angegebenen Zielmengen nicht zu klein sind. Das ist nur für g nicht ganz offensichtlich: Zu zeigen ist, daß

$$\pm\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}$$

für alle $u \in \mathbb{R}$, $v > 0$, stets positiv ist. Dies kann man so sehen:

$$\begin{aligned}
v > 0 \quad & \Longrightarrow \quad v + \frac{u^2}{4} > \frac{u^2}{4} = \left(\frac{u}{2}\right)^2 \\
& \Longrightarrow \quad \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} > \sqrt{\frac{u^2}{4}} = \left|\frac{u}{2}\right| \\
& \Longrightarrow \quad \pm\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} > \pm\frac{u}{2} + \left|\frac{u}{2}\right| \overset{(*)}{\geq} 0,
\end{aligned}$$

wobei wir für $(*)$ verwendet haben, daß für jede reelle Zahl a gilt $a + |a| \geq 0$ (denn für $a \geq 0$ ergibt dieser Ausdruck den Wert $2a$, der ebenfalls ≥ 0 ist, für $a \leq 0$ dagegen den Wert 0).

Wem diese Rechnung zu umständlich ist, der kann die Positivität unserer Zahlen bei entsprechender Inspiration auch folgendermaßen einsehen: Das Produkt der beiden Zahlen

$$\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} \quad \text{und} \quad -\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}$$

ist nach der dritten Binomischen Formel

$$v + \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{4} = v > 0,$$

also sind die Zahlen entweder beide positiv oder beide negativ; da ihre Summe aber

$$2 \cdot \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} \geq 0$$

ist, müssen sie beide positiv sein.

Nun können wir rechnen: Für alle $u, v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ gilt

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(u,v) &= f\left(\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}, \frac{u}{2} - \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} - \left(-\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}\right), \left(\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}\right)\right) \\
&= \left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2}, v + \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{4}\right) \\
&= (u, v)\,,
\end{aligned}$$

und für alle $x, y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gilt

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x,y) &= g(x - y, xy) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \sqrt{xy + \frac{(x-y)^2}{4}}, -\frac{x-y}{2} + \sqrt{xy + \frac{(x-y)^2}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \sqrt{xy + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4}}, -\frac{x-y}{2} + \sqrt{xy + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \sqrt{\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4}}, -\frac{x-y}{2} + \sqrt{\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}}, -\frac{x-y}{2} + \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \left|\frac{x+y}{2}\right|, -\frac{x-y}{2} + \left|\frac{x+y}{2}\right|\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}, -\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}\right) \\
&= (x, y)\,.
\end{aligned}$$

Also gilt $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$, d.h. f ist bijektiv und $f^{-1} = g$.

3. Weder die in a) noch die in b) angegebenen Strukturen sind Peanostrukturen:

   a) Die Abbildung ν ist injektiv, d.h. die Eigenschaft i) einer Peanostruktur (wie sie in Definition 5.1 in der Vorlesung angegeben ist) ist erfüllt. Allerdings ist $n_0 = 0 = \nu(4) \in \nu(N)$, so daß die

Eigenschaft ii) verletzt ist. Die Eigenschaft iii) dagegen ist wieder erfüllt: Denn ist $M \subset N$ eine Teilmenge mit $0 \in M$ und der Eigenschaft $\nu(m) \in M$ für alle $m \in M$, so folgt zunächst $1 = \nu(0) \in M$, daraus weiter $2 = \nu(1) \in M$, dann $3 = \nu(2) \in M$ und schließlich $4 = \nu(3) \in M$, also insgesamt $N \subset M$, d.h. $M = N$.

b) Die Abbildung ν ist nicht injektiv wegen $\nu(B) = C = \nu(F)$, d.h. Eigenschaft i) ist verletzt. Dagegen ist die Eigenschaft ii) erfüllt, denn $n_0 = A \notin \nu(N)$, wie man an der Wertetabelle ablesen kann (ihre untere Zeile enthält den Eintrag A nicht). Ebenso ist die Eigenschaft iii) erfüllt, denn ist $M \subset N$ eine Teilmenge mit $A \in M$ und der Eigenschaft $\nu(m) \in M$ für alle $m \in M$, so folgt $B = \nu(A) \in M$, weiter $C = \nu(B) \in M$, $D = \nu(C) \in M$, $E = \nu(D) \in M$ und schließlich $F = \nu(E) \in M$, also $M = N$.

4. a) i) Es ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{0}(2k-1) = 0 \quad \text{(leere Summe)},\\
&\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1,\\
&\sum_{k=1}^{2}(2k-1) = 1+3 = 4,\\
&\sum_{k=1}^{3}(2k-1) = 1+3+5 = 9,\\
&\sum_{k=1}^{4}(2k-1) = 1+3+5+7 = 16,\\
&\sum_{k=1}^{5}(2k-1) = 1+3+5+7+9 = 25.
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse auf der rechten Seite sind allesamt Quadratzahlen, und man kann vermuten, daß $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für alle $n \geq 0$ gilt.

ii) Wir behaupten:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt die Aussage } \quad A(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann gilt die Aussage $A(0)$ (wir haben ja sogar schon alle $n \leq 5$ überprüft).

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 0$ und es gelte die Aussage

$$A(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung}).$$

Wir wollen nun beweisen, daß dann auch

$$A(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2 \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung})$$

gilt.

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1\\
&= n^2 + 2n + 1 && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)}\\
&= (n+1)^2, && \text{(binomische Formel)}
\end{aligned}$$

wie behauptet.

b) Wir zeigen die Aussage

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist } \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

mit vollständiger Induktion (nach n).

Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{1} k^2 - 1^2 = 1$

und auch $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = 1 \quad \checkmark$

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 1$ und es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \qquad \big(\textbf{Induktionsvoraussetzung}\big).$$

Zu zeigen ist: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 \;=\; \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \qquad \big(\textbf{Induktionsbehauptung}\big)$

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= (n+1) \cdot \left(\frac{1}{6}\, n\,(2n+1) + (n+1)\right) \\
&= (n+1) \cdot \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \\
&= (n+1) \cdot \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \\
&= (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \\
&= (n+1) \cdot \frac{(2n+3)(n+2)}{6} && \text{(da } (2n+3)(n+2) = 2n^2 + 4n + 3n + 6 = 2n^2 + 7n + 6\text{)} \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.